# Лабораторная работа №2

# Тема: Решение систем линейных уравнений

Методы решения систем линейных уравнений. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений, приведенную в развернутой

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2.1) |

или в матричной форме

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2.2) |

где

|  |  |
| --- | --- |
| , , . |  |

Методы решения систем линейных уравнений можно разделить на две основные группы: прямые методы и итерационные. Прямые методы дают точное решение за конечное число операций. К таким методам относятся, например, методы Крамера и Гаусса. Итерационные методы дают решение системы уравнений как предел последовательных приближений при увеличении числа выполняемых итераций. Для итерационных методов необходимо выполнение условий сходимости и дополнительных преобразований, связанных с преобразованием системы в эквивалентную ей.

**Задание 1**

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Варианты заданий приведены в таблице 2.

Комментарий. Контроль выполняемых вычислений является важным элементом решения любой вычислительной задачи. Для контроля правильности выполняемых операций для прямого хода пользуются контрольными суммами, которые представляют собой суммы коэффициентов при неизвестных и свободного члена для каждого уравнения заданной системы.

Для контроля вычислений в основной части схемы единственного деления (столбцы коэффициентов при неизвестных и свободных членов) над контрольными суммами выполняют те же действия, что и над остальными элементами той же строки. При отсутствии вычислительных ошибок контрольная сумма для каждой строки в пределах влияниях погрешностей округления и их накопления должна совпадать со строчной суммой - вторым столбцом контроля. Строчные суммы представляют собой суммы всех элементов из основной части этой строки.

**Задание 2**

Решить систему линейных уравнений (2.1) методом простой итерации. Предполагается в дальнейшем, что матрица  системы уравнений квадратная и невырожденная, т.е. ее определитель не равен нулю.

Предварительно приведем систему (2.2) к итерационному виду:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2.3) |

Для произвольного начального вектора итерационный процесс

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

сходится, если выполнено одно из условий [2]

|  |  |
| --- | --- |
| а) , | (2.4) |

|  |  |
| --- | --- |
| б) , | (2.5) |

|  |  |
| --- | --- |
| в) . | (2.6) |

Процесс вычислений заканчиваем при выполнении условия

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2.7) |

где  () − одна из метрик, определяемая левой частью условий (2.4)-(2.6), по которой может быть установлена сходимость,  − заданная точность, например, .

**Задание 3**

Решить систему уравнений (2.1) методом Зейделя.

Метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что после нахождения какого-то значения решения на следующем шаге его используют для отыскания следующего приближения (значения на следующей итерации). Вычисления ведутся по формуле

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2.8) |

Каждое из условий (2.4)-(2.6) является достаточным для сходимости итерационного процесса по методу Зейделя. Практически же удобнее использовать следующее преобразование системы уравнений (2.2). После умножения обеих частей матричного уравнения (2.2) на транспонированную матрицу , получим эквивалентную ей систему

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

где  и . Далее, поделив каждое уравнение системы на , приведем систему к виду (2.8). Подобное преобразование также гарантирует сходимость итерационного процесса.

Ниже приведен примерный вариант выполнения лабораторной работы

Пример. Решите систему уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

1. Символьное решение систем уравнений

Фрагмент рабочего документа с соответствующими вычислениями приведен ниже. Здесь знак = ‑ знак логического равенства.

Первым пунктом определяем совместность системы уравнений. Для этого определяем ранги матрицы  системы уравнений и расширенной матрицы системы уравнений 

, 

с использованием оператора , . Так как ранги матриц равны, то в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли система имеет решение.

Вторым пунктом находим определитель матрицы : . Следовательно, система имеет единственное решение.

Решение системы уравнений с использованием операторов ***Given*, *Find*.**

Набираем оператор ***Given*** и набираем систему уравнений в следующем виде







После этого набираем оператор  и получаем решение

.

2. Решение системы линейных алгебраических уравнений как матричное уравнение .

Порядок выполнения задания.

Вначале выполняются два этапа, описанных выше, для проверки совместности системы уравнений и единственности ее решения.

Устанавливается режим автоматических вычислений.

Вводится матрица системы и матрицу-столбец правых частей системы уравнений.

Вычисляется решение системы по формуле  . Поучаем

.

Правильность решения проверяется путем непосредственного умножения матрицы системы  на вектор-столбец решения  в результате должен получиться вектор-столбец 

.

Найдите решение системы с помощью функции ***lsolve*** и сравните результаты.

Для решения набираем матрицу  и вектор-столбец . Набираем оператор

.

3. Решение линейной системы методом Гаусса

Комментарии. Функция  формирует расширенную матрицу системы добавлением к матрице системы  справа столбца правых частей . Функция  приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, представляющему собой расширение единичной матрицы и столбца свободных членов



Выполняя прямой и обратный ходы исключения, используемого в методе Гаусса. Последний столбец содержит решение системы исходной системы уравнений.

4. Решение системы методом Крамера.

Порядок выполнения работы при решении системы указанным методом.

Вначале выполняются два этапа, описанных выше, для проверки совместности системы уравнений и единственности ее решения.

Вычисляется определитель матрицы . Формируется  путем замены первого столбца матрицы  вектор-столбцом свободных членов . Вычисляется определитель матрицы .

Далее формируется матрица  заменой второго столбца матрицы  вектор-столбцом . Вычисляем определитель матрицы .

Далее повторяются указанные операции, и задается матрица  заменой третьего столбца матрицы  вектор-столбцом . Вычисляется определитель матрицы .

Определяем решение системы линейных уравнений следующим образом .

, ,

, , ,

, , ,

, , ,

, , , , , .

5.Решение системы линейных алгебраических уравнение методом простых итераций

Порядок выполнения задания.

Введите матрицы  и , определяющие систему уравнений.

Преобразуйте исходную систему  к виду ,

где , если , , .

Схема последовательных итераций имеет вид

, .

В качестве нулевого приближения  выбирается вектор-столбец .

Задайте количество необходимое количество итераций. Вычислите последовательные приближения.



, 

Матрица и вектор-столбец для итерационной процедуры имеют вид , .

Последовательные значения вектора  для 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X**= |  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 2 | 1,92 | 1,907 | 1,907 | 1,907 | 1,907 |
| 1 | 3 | 3,19 | 3,188 | 3,189 | 3,189 | 3,189 |
| 2 | 5 | 4,92 | 4,917 | 4,917 | 4,917 | 4,917 |

.

6. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

Порядок выполнения задания.

Введите матрицы  и , определяющие систему уравнений.

Преобразуйте систему уравнений  к виду , к виду .

Определите нулевое приближение решения.

Задайте количество необходимое число итераций.

Вычислите последовательные приближения.



, 

, ,

, , .

, , .

Определим итерационную процедуру следующим образом

, , , .

Последовательные значения вектора  для 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X**= |  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 1,92 | 2 | 1,907 | 1,907 | 1,907 |
| 3 | 3 | 3,19 | 3 | 3,189 | 3,188 | 3,188 |
| 5 | 5 | 4,92 | 5 | 4,917 | 4,917 | 4,917 |

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № варианта |  |  |  |  |
| 1 | 0.35  0.12  - 0.13 | 0.12  0.71  0.15 | - 0.13  0.15  0.63 | 0.10  0.26  0.38 |
| 2 | 0.71  0.10  - 0.10 | 0.10  0.34  0.64 | 0.12  - 0.04  0.56 | 0.29  0.32  - 0.10 |
| 3 | 0.34  - 0.04  0.06 | - 0.04  0.44  0.56 | 0.10  - 0.12  0.39 | 0.33  - 0.05  0.28 |
| 4 | 0.10  - 0.04  - 0.43 | - 0.04  0.34  0.05 | - 0.63  0.05  0.13 | - 0.15  0.31  0.37 |
| 5 | 0.63  0.05  0.15 | 0.05  0.34  0.10 | 0.15  0.10  0.71 | 0.34  0.32  0.42 |
| 6 | 1.20  - 0.50  - 0.30 | - 0.20  1.70  0.10 | 0.30  - 1.60  - 1.50 | - 0.60  0.30  0.40 |
| 7 | 0.30  - 0.10  - 1.50 | 1.20  - 0.20  - 0.30 | - 0.20  1.60  0.10 | - 0.60  0.30  0.70 |
| 8 | 0.20  0.58  0.05 | 0.44  - 0.29  0.34 | 0.91  0.05  0.10 | 0.74  0.02  0.32 |
| 9 | 6.36  7.42  1.77 | 1.75  19.03  0.42 | 1.0  1.75  6.36 | 41.70  49.49  27.67 |
| 10 | 3.11  - 1.65  0.60 | - 1.66  3.15  0.78 | - 0.60  - 0.78  - 2.97 | - 0.92  2.57  1.65 |

**Контрольные вопросы**

1. К какому типу решения систем линейных уравнений ‑ прямому или итерационному ‑ относится метод Гаусса?

2. В чем заключается выполнение операций прямого и обратного хода в схеме единственного деления?

3. Как организуется контроль над вычислениями при выполнении операций прямого и обратного хода?

4. Как строится итерационная последовательность для нахождения решения системы линейных уравнений?

5. Как формулируются достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении систем линейных уравнений?

6. Как условия сходимости связаны с выбором метрики пространства?

7. В чем отличие итерационного процесса метода Зейделя от аналогичного процесса метода простой итерации?